DMUK Forårsmøde 14 maj 2013

Historie i matematikundervisningen:

matematiklæring og historiebevidsthed.

Tinne Hoff Kjeldsen
IMFUFA
Department of Science, Systems and Models,
RUC
thk@ruc.dk

RUC Roskilde Universitet
Roskilde University www.ruc.dk

- Indgang til forskning i feltet:
  Historie i matematikundervisningen

The Ninth International History, Philosophy and Science Teaching Conference, Calgary, 2007

- Oplevelse af to lejre:
  Ægte tilgang til historie vs. relevant matematik
  1. Hvor er matematikken henne?
  2. Det har ikke noget med historie at gøre!

1. Historie i matematikundervisningen:

   Historiebevidsthed

   Matematiklæring

Kan disse støtte hinanden?

2. Kan matematikhistorie fungere ved kernen af, hvad det vil sige at lære matematik?

To eksempler:

1. ægyptisk matematik – i en 1. g
2. funktionsbegrebets historie – i en 2. g

Kulturelle argument for matematik i almen (ud)dannelse

Historie i matematikundervisningen:

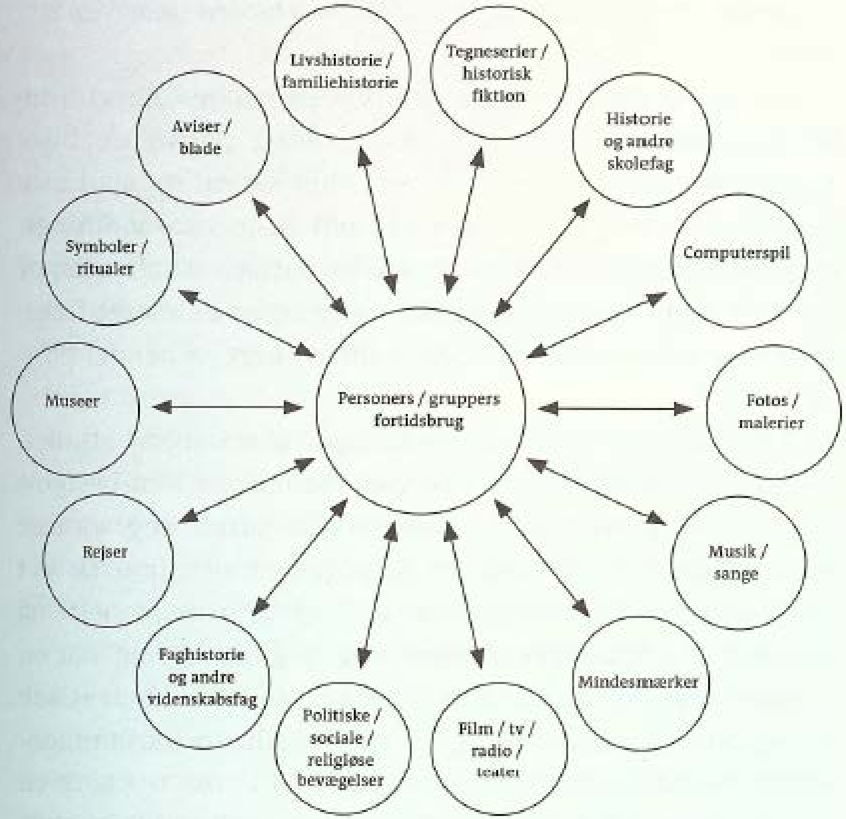
1. Historiebevidsthed
2. Matematiklæring

Kan disse støtte hinanden?

Matematik: Mogens' kompetencebegreb

Historie: Bernard Eric Jensens *Hvad er historie*

1. Bredere forståelse af historie
2. Historiebevidsthed dannes og bruges mange steder



Historiebevidsthedens dannelses- og brugssteder.

Historie i matematikundervisningen:

1. Historiebevidsthed
2. Matematiklæring

Kan disse støtte hinanden?

Hvad er historie – Bernard Eric Jensen

1. Bredere forståelse af historie
2. Historiebevidsthed dannes og bruges mange steder

"Udfordringen består ikke i at få ophævet kompleksiteten ved at sige at en bestemt forståelse af historie er den eneste rigtige, medens alle de andre slet ikke duer. Udfordringen består snarere i at få klarlagt såvel ligheder som forskelle mellem de måder, hvorpå historie bliver forstået og brugt" (s.8)

Fire begrebspar: Sætte ord på (en del af) de forskellige former for historiebrug

Pragmatisk og lærd historie

Læg-historie og faghistorie

Aktørhistorie og observatørhistorie

Identitetsnær og identitetsneutral historie

Udelukker ikke hinanden, de overlapper, kan være tilstede i forskellige grader

Adresserer metodiske aspekter, historie som en akademisk disciplin og som en hverdagsbrug, intentioner med fortidsbrug

Pragmatisk historie og lærd historie:

- *Pragmatisk:* opfatte historie som livets læremester. Fortiden studeres ud fra et nytteperspektiv – aktualisere den fortalte historie

- *Lærd:* kritisk distancering, påpege forskelle mellem fortiden og nutiden. Historie går ud på opnå indsigt i og forstå fortiden på dens egne præmisser (Dominerende tilgang i Akademia siden midten af 1800-tallet).

Aktørhistorie og observatørhistorie

- Aktørhistorie: tilgang til historie, hvor noget fortidigt anskues under en fremadskuende synsvinkel. Viden om fortiden bruges til orientere sig og/eller handle i en nutidig kontekst – indgribende brug af historie.
- Observatørhistorie: tilgang hvor noget fortidigt betragtes under en tilbageskuende synsvinkel – oplysende historiebrug

"Living history" – en levendegjort historie (vikingetræf)

- Tiltaler mange mennesker:
    - Aktive deltagere i en sådan historiebrug
    - Bruge andre læringsstrategier – opøve færdigheder

Analytisk redskab:

Identificere og skelne mellem forskellige tilgange til og brug af historie

Analysere og designe undervisningsforløb med inddragelse af historie

Mogens' kompetencebegreb

1. Historie i matematikundervisningen:

   Historiebevidsthed

   Matematiklæring

Kan disse støtte hinanden?

Eks: Projektarbejde om ægyptisk matematik – 1g. klasse

Udviklet i et efteruddannelseskursus på RUC

- Problem orienteret projektarbejde

Fire trin:

1. Tredagsseminar: Introduktion til teori. Lærere udvikler et problemorienteret projektarbejde efter eget valg (læringsmål, elevmaterialer, produkt)
2. Afprøves i egen klasse
3. Lærerne dokumenterer forsøget i en skriftlig rapport
4. Todagsseminar: erfaringer og dokumentation af forsøget og resultaterne

Eks: Projektarbejde om Ægyptisk matematik – 1g. klasse

”I skal de næste 4 moduler (27/10, 1/11 4/11 og 5/11) arbejde i grupper med følgende overordnede problem:

Hvordan og hvorfor regnede ægypterne?

Matematik-kompetencer

Formålet med forløbet er, at I skal:

1. prøve at sætte jer ind i noget matematik på egen hånd
2. se, at matematikken ikke er statisk, men har udviklet sig gennem århundrederne
3. erfare, at matematik kan være meget anderledes end i dag
4. opdage, at matematikken udvikles i et samspil med kulturen og samfundet”

Matematikhistorie – historiebevidsthed

Ramme om forløbet:

”Hver gruppe tildeles et delemne (nogle sider fra bogen: Ægyptisk matematik af Jesper Frandsen, Systime, 1996) som I skal læse og forstå. Herefter kan I supplere med løsning af opgaver eller anden litteratur. I skal søge at besvare det overordnede problem, hvordan og hvorfor regnede ægypterne, ud fra jeres delemne og inddrage hvad I har lært i historie.”

1. Division, brøkregning og de røde hjælpetal
2. Pesu (brød/øl-mål):
3. Ligninger (komplettering og regula falsi
4. Arealbestemmelse:
5. Cirklen og π
6. Rumfang af pyramidestub
7. Rumfang af cylinder eller halvkugle

Selvstændighed – matematik på egen hånd:

> **“eleverne var ikke i tvivl om, at den indsigt i ægyptisk matematik, som de hver især opnåede, havde de selv skaffet sig. De havde selv ”brudt koden”. ”**

2. *se, at matematikken ikke er statisk, men har udviklet sig gennem århundrederne*
3. *erfare, at matematik kan være meget anderledes end i dag*

Pragmatisk historie – nytteperspektiv

2) og 3) matematikhistorie:

"De handler alle sammen om at få nogle erkendelser om nutidens matematik, netop ved at se på en andens tid matematik."

"[diskussion af] delmålene 2, 3 [og 4], hvorunder klassen tilsyneladende accepterede, at historisk matematik ud over at være interessant i sig selv kunne bidrage til et mere nuanceret syn på nutidens matematik."

4. *opdage, at matematikken udvikles i et samspil med kulturen og samfundet”*

4) matematikhistorie:

“Ud fra en generel viden om det gamle Ægypten og samfundsforholdene dengang kan eleverne forholde sig til hvordan samfundsforhold og kultur har været styrende for datidens matematik. Samtidig er historiens kildekritik et væsentlig værktøj, når man skal tolke ud fra tvetydige og mangelfulde papyri. ”

lærd historie – observatør perspektiv

"Hvordan og hvorfor regnede ægypterne?"

"*Hvordan*": kan ses som en "living-history" tilgang

Sætte sig i ægypternes sted, prøve at forstå og lære hvordan de regnede, arbejdede med geometri, stillede spørgsmål

"mange elever fik en erkendelse af, at nutidens matematik ikke "bare" er som i dag, men er resultat af en langvarig udvikling, hvor mange ting er blevet forenklet med tiden."

Historiebevidsthed

"Dette blev også tydeligt ved at eleverne hele tiden omskrev fra ægyptisk notation til nutidig notation med x'er, formler mm. Efter en gennemgang af en ægyptisk udregning kom bemærkningen: "men det svarer jo bare til …" hvorefter fulgte en nutidig ligningsløsning. Det var således inspirerende at se, hvordan eleverne, der normalt virker lidt fremmedgjorte over for x'er og ligninger, havde taget disse til sig som deres egne og pludselig opfattede ligninger som en nem måde at løse problemer på."

Udvikling af læringsstrategier

Hvorfor – delen: Samfundsforhold og kulturs indflydelse på matematikken: Lykkedes ikke … (historielæreren)

lærerens vurdering: De sammenlignede moderne og ægyptisk matematik og de erkendte at matematikken har forandret sig, men de studerede ikke den faktiske forandringsproces.

Lærerens rapport viser at adskillige af elevernes matematiske kompetencer blev trænet:

problemløsningskompetence;

deres kompetence til at omgås symboler

Historie i matematikundervisningen:

1. Historiebevidsthed
2. Matematiklæring

Kan disse støtte hinanden?

Med projektet blev der sat en scene for elevernes arbejde så de fik historiske indsigter og historisk viden samtidig med at de arbejdede med matematikaktiviteter, der er relevante for deres gymnasiematematik

“Funktionsbegrebet set med historiske og nutidige briller”

Forløb prøvet af i en 2. g. klasse

Can history of mathematics function at the core of learning mathematics?

Teoretisk argument givet i Kjeldsen & Blomhøj (2012)

Ide: Teste dette i praksis i en gymnasieklasse

Didaktisk teori:

Baseret på Anna Sfard’s teori *Thinking as Communicating*.

Pernille Hviid Petersen: *Potentielle vindinger ved inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen.* IMFUFAtekst 483

NB! Eleverne havde haft om funktionsbegrebet – formålet med forløbet var ikke at de skulle lære funktionsbegrebet – det var kendt stof

Historisk fokus:

1. Leonhard Eulers (1707-1783) udvikling af funktionsbegrebet
2. Debatten om den svingende streng i 1700 tallet
3. Forandringer i organiseringen af matematikuddannelser i forbindelse med den franske revolution i 1789
4. Dirichlets (1805-1859) funktionsbegrebet fra 1800 tallet

Her: se på 1, 2, og 4

To normer [“meta-regler” i Eulers diskurs]:

Analysens generelle gyldighed:

Analysens udsagn, resultater og teknikker var generelt gyldige

Den variables generalitet (**Fokus**):

en variabel i en funktion kan antage alle værdier – den kan ikke begrænses til f.eks. et interval

Ikke alment accepteret på Dirichlets tid.

Intention: eleverne skulle blive bevidste om

- Der er sådanne normer [regler] i matematik, og de er historiske
- Eleverne skulle bringes til at reflektere over den rolle beviser og definitionsmængder spiller i dag.

Sfard: etablere korrekte meta-regler – vanskeligt - ikke *nødvendige*

De kan studeres historisk!

Eulers definition af variabel og funktion (1748):

Introductio in Analysin Infinitorum

"En variabel størrelse er en størrelse, der er ubestemt eller universel og som kan antage enhver værdi"

og

"En funktion af en variabel størrelse er et analytisk udtryk sammensat på en hvilken som helst måde af den variable størrelse og tal eller konstante størrelser"

Eulers definition af funktion:

- en formel – givet ved et analytisk udtryk.
- Defineret overalt
- I overensstemmelse med princippet om den variables generalitet

Eulers udvidede (diskontinuert) funktion:

D’Alembert: 1747 – løsning af bølgeligningen.

Euler: en knipset streng er ikke indeholdt i D’Alemberts løsning (Lutzen 1983)

Matematik skulle kunne beskrive alle situationer i fysik

For at beskrive den knipsede streng udvidede Euler funktionsbegrebet til funktioner, der er givet ved forskellige analytiske udtryk i forskellige intervaller.

Dem kaldte han for diskontinuerte funktioner.

Dirichlets funktionsbegreb (1837):

- Ikke styret af den variables generalitet
- *Über die Darstellung ganz wilkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*
  "Man tænker sig, at *a* og *b* er to konstante værdier, og at *x* er en variable størrlese, som lidt efter lidt skal antage alle værdier, der ligger mellem *a* og *b*. Udspringer der nu af ethvert *x* et eneste definit *y*, og det således, at mens *x* kontinuerligt gennemløber intervallet fra *a* til *b*, forandrer $y=f(x)$ sig ligeledes gradvist, så kaldes *y* en kontinuert […] funktion af *x* i dette interval. Det er tillige slet ikke nødvendigt, at *y* er afhængig af *x* i overensstemmelse med en og samme lov i hele dette interval, ja man behøver ikke engang tænke på en afhængighed, der kan udtrykkes gennem matematiske operationer"

Hjælp til elevernes arbejde:

- En række forskellige matematikhistoriske materialer, bøger og artikler
- Der var indsat bogmærker i materialet
- Arbejdssedler der var designet til at lede eleverne ind i diskussioner om fortidens normer [regler] og sammenligne dem med, hvordan vi ser på dem i dag.
- Arbejdet med uddrag af originale kilder fra Eulers og Dirichlets arbejder og fra nutidige lærebøger var essentielt for designet.

Ide:

- Eleverne skulle konfronteres med forskellige opfattelser af funktionsbegrebet
  - De historiske,
  - Som i nutidige lærebøger
  - Og deres egen

  Begreber som er i overensstemmelse med forskellige normer [regler]

Implementering Matrix struktur: (Kjeldsen 2011b)

Trin 1: fire basis grupper (5 lektioner af 50 min. + hjemmearbejde)

Trin 2: fire ekspert grupper (4 lektioner + 1 i klassen + hjemmearb)

TRIN 1

- Basis gr 1: Historiske definitioner af en funktion
- Basis gr 2: Debatten om den svingende streng
- Basis gr 3: Euler, Dirichlet og de samfund de levede i
- Basis gr 4: Det moderne funktionsbegreb

Hver basisgruppe skrev en rapport der besvarede spørgsmålene i deres arbejdsseddel.

Gruppe 1 - Historiske funktionsdefinitioner

Gruppens medlemmer:

Gruppens opgave: Her i kompendiet har I på side 11 et uddrag af Eulers bog *Introductio in Analysin Infinitorum* (tekst 1) og på side 12 et uddrag af Dirichlet artikel *Über die Darstellung ganz wilkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (tekst 3). Derudover har I på side 12 en kort forklaring af Eulers udvidelse af sit oprindelige funktionsbegreb (tekst 2). Disse tekster skal I bruge til at besvare følgende opgave:

I skal forklare, hvad en funktion er ifølge Eulers oprindelige funktionsdefinition fra *Introductio in Analysin Infinitorum*, Eulers udvidede funktionsdefinition og Dirichlets funktionsdefinition. Derudover skal I også beskrive, hvordan disse tre funktionsdefinitioner adskiller sig fra hinanden, og på hvilke måder de ligner hinanden. I skal også forklare, hvad princippet om den variables generalitet går ud på, hvordan hhv. Euler og Dirichlet forholder sig til dette princip og hvordan forholdet mellem dette princip og princippet om analysens generelle gyldighed er.

Krav til besvarelsen: Svarene på nedenstående spørgsmål skal indgå i jeres besvarelse af den ovenstående opgave. Jeres besvarelse skal dog ikke blot være en besvarelse i punktform af spørgsmålene. Derimod skal jeres besvarelse være en sammenhængende tekst, hvori svarerne på spørgsmålene indgår. Denne tekst må meget gerne indeholde mere end kun svarene på spørgsmålene. Jeres besvarelse af denne opgave skal danne en del af grundlaget for jeres kommende arbejde i de næste grupper (ekspertgrupperne), så det er vigtigt, at jeres klassekammerater også kan læse den og få mening ud af den. I jeres besvarelse af opgaven skal I huske at angive, hvilke kilder I har brugt.

1. I §4 i tekst 1 giver Euler en definition af en funktion. Hvad er de centrale begreber i denne definition?

2. Hvilket princip kendetegner ifølge Euler en variabel? Hvad kaldes dette princip? (Vink: Euler bruger ikke selv denne betegnelse. Se i stedet evt. i kapitel 3 i *Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb*)

3. Hvad går princippet om analysens generelle gyldighed ud på? (Vink: Se evt. i kapitel 2 i *Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb*)

4. Hvilke ligheder er der mellem princippet om den variables generalitet og princippet om analysens generelle gyldighed? Overvej, hvorfor begge disse principper har fået navne, der indeholder ordet "generel".

5. Hvordan adskiller Eulers udvidede funktionsbegreb sig fra Eulers oprindelige begreb, og hvordan ligner det det oprindelige (Vink: Hvad er det centrale begreb i det udvidede funktionsbegreb)?

6. I tekst 3 giver Dirichlet sin definition af en funktion. Kan I finde tre punkter, som denne definition adskiller sig fra Eulers definition på?

TRIN 2

- 4 ekspertgrupper – en fra hver basisgruppe – deling af viden
- Hver ekspertgruppe besidder viden fra alle basisgrupperne.

Opgave: Skrive en artikel til tidskriftet NORMAT

Ophidset diskussion mellem to grupper af matematikere:

1. Matematiske begreber er statiske, tidsløse entiteter der er uafhængig af mennesker
2. Matematiske begreber er resultat af en udviklingsproces hvor centrale ideer og måden at tale om det på har ændret sig

Hvad er jeres holdning til det?

Eleverne skal argumentere for deres holdning baseret på det samlede arbejde, der er foretaget i basisgrupperne.

Hjælp:

- guide til forfattere

Resultater om elevers refleksion over normerne [reglerne]

Teste ideen om at arbejde med historiske kilder kan bringe normer [meta-regler] frem i lyset og gøre dem til genstand for elevers refleksion.

Dialog i ekspertgruppe 1. Diskuterer med reference til debatten om den svingende streng, reglen om den variables generalitet og Eulers diskontinuerte funktioner.

Elev 1: Hvordan ville Euler kunne lave en knipset streng? Hvis han udregnede først for den ene streng her og så for den anden streng bagefter … ville de så ikke krydse over hinanden og så bare fortsætte videre lige ud?

Lærer: Jo, … det er et af problemerne formodentligt, ik? .. At få lavet det der knæk.

Elev 1: Men han udregnede en formel for den ene streg og så bagefter den anden streg. Og så ville de jo ramme hinanden. … Men ville de fortsætte stregerne, så de faktisk bare lavede et kryds I stedet? … Det ser han bort fra – det giver faktisk ingen mening.

Eulers funktionsbegreb bryder sammen

- Dialog der tyder på at **Elev 1** selv er styret af en version af den variables generalitet
- De er lige begyndt at diskutere om der er forskel på Eulers, Dirichles og det moderne funktionsbegreb.

Elev 1:

I dag snakker vi jo om at en *f* – at *y* er en uafhængig – eller er en afhængig, øh, variabel. Dvs. Den afhænger af nogen andre. Hvor *x* er den uafhængige variable, *a* og *b* er konstante. … og derfor urokkelige i en funktion ik?

> “og Euler definerede i sin tid en konstant størrelse som værende en størrelse, der havde det samme værdi uanset hvad” [rapport fra basisgruppe 1].

Dvs. Hans konstanter, altså *a* og *b*, må have været ligesom vores nu om dage ..[læser fra rapporten]:

> “Hvorimod han definerede en variabel som værende en størrelse som kunne have en hvilken som helt værdi. En værdi hvor altså mængden var ligegyldig.”

Og der er – altså – som jeg ser det så er det delvis ligesom i dag.

Elev 2: Det er det også.

Elev 1: fordi … øhm … *y* afhænger jo af noget … så den kan ikke være lige meget. Men den kan jo godt ændres. *x* kan være lige meget. Hvad den er.

Adskillige af dialogerne tydede på at eleverne selv var styret af en version af normen om den variables generalitet.

[Definitionsmængde var ikke en del af de studerendes funktionsbegreb]

Eks. 2: Arbejdet med de historiske kilder skabte flere situation der afslørede, at nogle af de studerende var styret af normer [meta-regler] der ikke er sammenfaldende med det matematiske samfunds regler.

- Eleverne forsøger at forstå hvad basisgruppe 1 har skrevet om Dirichlets tekst:

Elev 1: [læser højt fra basisgruppe 1's rapport]

"*… og a og b var to tal på x-aksen*."

Elev 2: Der skulle have stået *y*-aksen, det er jo det der menes. Er det ikke? *x* er den vej og *y* er den anden vej [tegner et koordinatsystem i luften]… Ja, så er det også y-aksen. Går lige ind og siger det til de andre [forlader lokalet]

Elev 1: Ikke i vores funktionsbegreb [9 sek. tænkepause]. Det er rigtigt, at … hvad hedder det, *b* er et tal på *y*-aksen. Men det vil jeg da ikke mene *a* er.

Elev 3: *a* det er den der går ud og så op, ik? [tegner med fingeren i luften]

[For denne elev er *a* hældningskoeff. for en lineær funktion]

Elev 1: det afhænger af hvad det er for en funktion

- [Elev 2 kommer ind i rummet igen]

Elev 2: Øh, venner, det er *x*-aksen, men det er fordi, det er formuleret lidt forkert, ik? [Tegner et koordinatsystem på tavlen]. Er I med, hvad det her er? …. Godt. Han [Dirichlet] mener, at der et punkt her, ik? [tegner et punkt på koordinatsystemets førsteakse] … Det er *a*. Og så er der et punkt her [tegner endnu et punkt på førsteaksen]. Det er *b*. … Og så mener han bare, at den i princippet kan gå sådan her [tegner en graf der går fra *a* til *b*] fra *a* til *b* på *x*-aksen. … Forstår I?

Elev 1: Men det er jo ikke sådan vi ser *a* og *b* i dag.

Elev 2: Nej, men det er det han mente

- I elevernes matematiske diskurs er *a* og *b* konstanter i en funktion, det er en regel, og for **elev 3**, er de konstanter i en lineær funktion.
- For disse elever er symbolerne en del af objektet – de er ikke produkter af vores beslutninger. Betydningen er indlejret i symbolet. Adskillige dialoger, der viste dette.
- Elevernes meta-regler har betydning for deres forståelse og fortolkning af det matematiske indhold – vigtigt for elever at udvikle korrekte meta-regler for at lære matematik.

Konklusion

- Ikke muligt ud fra dette forsøg alene at give evidens for at elevernes regler ændrede sig.
- Ifølge Sfard skal elevernes udsættes for/erfare/opleve en kognitiv konflikt.
- Forsøget viser, at denne måde at integrere historie på kan bruges til at pinpointe sådanne regler. Den viden kan så bruges fremadrettet af læreren til at adressere læringsmål, der kan fokusere elevernes opmærksomhed mod udvikling af korrekte regler, (i overensstemmelse med det matematiske samfunds).
- Historie kan fungere ved kernen af hvad det betyder at lære matematik. Afsløre meta-regler (lærd-historie) og gøre dem til genstand for elevernes refleksioner, facilitere udvikling af korrekte meta-regler.

1. Historie i matematikundervisningen:
   Historiebevidsthed
   Matematiklæring

Kan disse støtte hinanden?
JA

2. Kan matematikhistorie fungere ved kernen af, hvad det vil sige at lære matematik? Ja - Tja

To eksempler:

1. ægyptisk matematik – i en 1. g
2. funktionsbegrebets historie – i en 2. g

Historie i matematikundervisningen:

Udvikle og iscenesætte komplekse læringssituationer:

1. Eleverne får mulighed for at diskutere, afprøve og læse ny mening ind i matematiske begreber – qua den historiske kontekst. Historie og matematiklæring kan ”gå hånd i hånd”
2. Læreren kan få indblik i elevernes læreprocesser qua den historiske kontekst via pædagogiske observationer i form af dialoger – vindue indtil elevernes begrebsforståelse - meta-regler